

# מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 3 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות.....1
2. פעולות על קבוצות.....2
3. דיאגרמת ון.....4
4. קריאת קבוצות.....6
5. שאלות הוכחה.....8
6. דרך השלילה.....10
7. קבוצת חזקה.....11
8. מכפלה קרטזית.....13

## מבוא לתורת הקבוצות

## שאלות

1) לגבי כל אחד מהממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים,  $\in, \notin, \subseteq, \subset, \supseteq, \supset, \neq$ . שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא  $\neq$ , נמקו.

א.  $1 \square \{1, \{1\}\}$       ב.  $\{1\} \square \{1, \{1\}\}$       ג.  $\{8, \emptyset\} \square \{1, 2, 8\}$

ד.  $\emptyset \square \{1, 2\}$       ה.  $\emptyset \square \{\emptyset, 1, 2\}$

ו.  $\{2\} \square \{\{1, \{2\}\}\}$       ז.  $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}\}$

ח.  $\{2\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$       ט.  $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}, \{2\}\}$

י.  $\{\{2\}, \emptyset\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$       יא.  $\emptyset \square \{1, \{\emptyset\}\}$

יב.  $\{\emptyset\} \square \{1, \{\emptyset\}\}$       יג.  $\{1, 2\} \square \{1, \{2\}\}$

יד.  $1 \square \mathbb{N}$       טו.  $\{1\} \square \mathbb{N}$

טז.  $1 \square \{\mathbb{N}\}$       יז.  $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$

## תשובות סופיות

1) א.  $\in$       ב.  $\subseteq$       ג.  $\neq$       ד.  $\subseteq$       ה.  $\subseteq$   
ו.  $\neq$       ז.  $\subseteq$       ח.  $\subseteq$       ט.  $\subseteq$       י.  $\neq$   
יא.  $\subseteq$       יב.  $\neq$       יג.  $\neq$       יד.  $\neq$       טו.  $\subseteq$   
טז.  $\neq$       יז.  $\neq$

## פעולות על קבוצות

### שאלות

(1) עבור  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$  חשבו את הקבוצות הבאות:

א.  $(A \cup C) \setminus B$

ב.  $(A \cap B) \cup C$

ג.  $A \cap (B \cup C)$

ד.  $P(A)$

ה.  $C \setminus A$

(2) עבור  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$ :

א. האם  $B \subseteq C$ ?

ב. האם  $\{1\} \subseteq B$ ?

ג. האם  $\{1\} \subseteq A$ ?

ד. האם  $\{1\} \in P(A)$ ?

ה. האם  $\{1\} \subseteq P(A)$ ?

ו. האם  $\{\{1\}\} \subseteq P(A)$ ?

ז. האם  $\{\{1\}, \emptyset\} \subseteq P(A)$ ?

(3) עבור  $A = \{1, \{3, *\}, \emptyset\}, B = \{4, \emptyset\}$  חשבו:

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $A - B$

ד.  $B - A$

ה.  $A \oplus B$

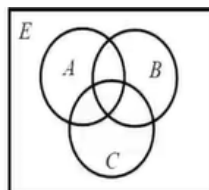
## תשובות סופיות

- (1) א.  $\{1, 2, 6\}$     ב.  $\{1, 3, 4, 6\}$     ג.  $\{1, 3\}$     ד.  $2 \notin P(A)$
- (2) א. לא.    ב. לא.    ג. כן.    ד. כן.
- ה. לא.    ו. כן.    ז. כן.
- (3) א.  $\{1, \{3, *\}, \emptyset, 4\}$     ב.  $\{\emptyset\}$     ג.  $\{1, \{3, *\}\}$     ד.  $\{4\}$
- ה.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

## דיאגרמת ון

## שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.

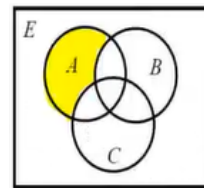


קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות :

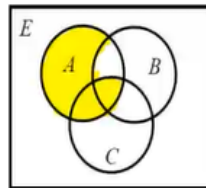
- |                        |                                     |
|------------------------|-------------------------------------|
| א. $(A - B) - C$       | ב. $A - (B - C)$                    |
| ג. $A \cap B^c$        | ד. $(A \cap B^c) \cup (C \cap A^c)$ |
| ה. $(A \cap B) \cap C$ | ו. $A \cap (B \cap C)$              |
| ז. $(A \cup B) \cup C$ | ח. $A \cup (B \cup C)$              |

## תשובות סופיות

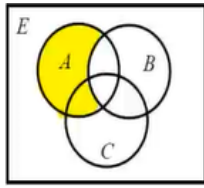
1) א.



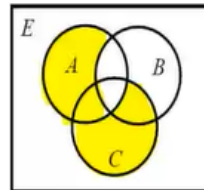
ב.



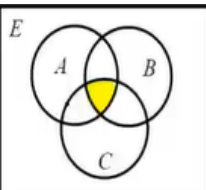
ג.



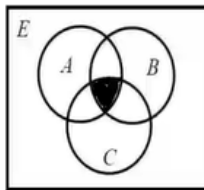
ד.



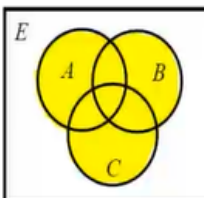
ה.



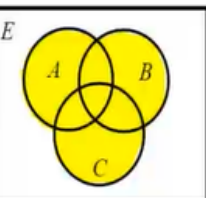
ו.



ז.



ח.



## קריאת קבוצות

## שאלות

(1) עבור  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים,  $\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{1, 3, 5, \dots\}$ .

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי,  $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$ .

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,

$B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, \dots\}$ .

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,

$C = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots\}$ .

ה. קבוצת כל החזקות של 2,

$D = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ .

(2) עבור  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , חשבו את הקבוצות הבאות:

א.  $C = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

ב.  $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 2 \rightarrow x^2 > 41\}$ .

ג.  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 7 \rightarrow x < 20\}$ .

ד.  $C = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{n} \in \mathbb{N}\} = \{3n-1 \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$ .

ה.  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 8 \rightarrow x^2 < 67\}$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. דרך 1: } \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N} \right\}, \text{ דרך 2: } \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ב. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}, \text{ דרך 2: } \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ג. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \notin \mathbb{N}\}, \text{ דרך 2: } \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall k \in \mathbb{N} \ n \neq k^2\}.$$

$$\text{ד. דרך 2: } \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ה. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \ n = 2^k\}, \text{ דרך 2: } \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$(2) \text{ א. } C = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots\}$$

$$\text{ב. } \mathbb{Z} - \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots\}$$

$$\text{ג. } \mathbb{Z} - \{20, 21, 22, 23, \dots\}$$

$$\text{ד. } \{2, 11, 26, 74, 107, 146, \dots\}$$

$$\text{ה. } \mathbb{Z} - \{9, 10, 11, 12, \dots\}$$



## שאלות הוכחה

## שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

(1) תהיינה  $A, B$  קבוצות.

אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.  
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.  
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.  
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A \cup B$ .

ב. אם  $x \notin A \cup B$ , אז  $x \notin A$ .

ג. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A \cap B$ .

ד. אם  $x \notin A \cap B$ , אז  $x \notin A$ .

ה. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A - B$ .

ו. אם  $x \notin A - B$ , אז  $x \notin A$ .

ז. אם  $x \in B$ , אז  $x \notin A - B$ .

ח. אם  $x \notin A - B$ , אז  $x \in B$ .

ט.  $x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$ .

י.  $x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$ .

יא. השלימו:  $x \notin A - B \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ .

יב.  $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$ .

יג.  $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$ .

יד. אם  $A = A \cup B$ , אז  $A \subseteq B$ .

טו. אם  $A = A \cup B$ , אז  $B \subseteq A$ .

טז. אם  $A = A \cap B$ , אז  $A \subseteq B$ .

יז. אם  $A = A \cap B$ , אז  $B \subseteq A$ .

יח. אם  $A \subseteq B$ , אז  $A = A \cup B$ .

יט. אם  $B \subseteq A$ , אז  $A = A \cup B$ .

כ. אם  $A \subseteq B$ , אז  $A = A \cap B$ .

כא. אם  $B \subseteq A$ , אז  $A = A \cap B$ .

(2) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $A = A - B$ , אז  $B = \emptyset$ .

ב. אם  $A = A - B$ , אז  $A \cap B = \emptyset$ .

ג. אם  $A = A \cup B$ , אז  $A \cap B = B$ .

ד. אם  $B = A \cup B$ , אז  $A \cap B = B$ .

ה. אם  $A \cap B = A$ , אז  $A = A \cup B$ .

ו. אם  $A \cap B = B$ , אז  $A = A \cup B$ .

ז. אם  $A \cup B = A \cup C$  וגם  $A \cap B = A \cap C$  אז  $B = C$ .

ח.  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$ .

ט.  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$ .

י.  $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ .

יא.  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ .

יב.  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .

יג.  $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$ .

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1.  $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

2.  $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

## תשובות סופיות

- (1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.  
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.  
יא.  $x \in B \vee x \notin A$  יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.  
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.  
כ. נכונה. כא. לא נכונה.
- (2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.  
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.  
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד. 1. נכונה. 2. לא נכונה.

## דרך השלילה

### שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם  $\alpha$ , אז  $\beta$ , נוכיח אם  $\neg\beta$ , אז  $\neg\alpha$ .

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה  $\neg\beta$  ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

(1) אם  $A \cap C = \emptyset$  אז  $A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$

(2) אם  $A \subseteq B$  אז  $(A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$

(3) אם  $(A - C) \cap B = \emptyset$  אז  $(A \cup B) - C \subseteq A - B$

(4) אם  $B \subseteq A$  אז  $(C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$

(5) אם  $A \subseteq A \Delta B$  וגם  $B - C = B \Delta C$  אז  $A \cap C = \emptyset$

(6) אם  $A \subseteq A \oplus B$  וגם  $B - C = B \oplus C$  אז  $A \cap C = \emptyset$

### תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

## קבוצת חזקה

## שאלות

(1) עבור  $A = \{3, \{\emptyset\}\}$ ,  $B = \{\{3\}, \{4, \emptyset\}\}$ ,  $C = \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$  רשמו את הקבוצות הבאות:

א. את  $P(C)$ ,  $P(B)$  ואת  $P(A)$ .

ב.  $P(A) \cap B$ ,  $P(A) \cap A$ ,  $P(C) \cap C$  ואת  $C - P(C)$ .

(2) עבור הקבוצות  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $B = \{1, \emptyset\}$

א. רשמו את  $P(A)$  ואת  $P(B)$ .

ב. רשמו את  $P(A) - P(B)$  ואת  $P(B) - P(A)$ .

ג.  $P(A) - A$  ואת  $P(A) - \{A\}$ .

(3) רשמו את  $P(\emptyset)$ , את  $P(P(\emptyset))$  ואת  $P(P(P(\emptyset)))$ .

(4) תהיינה  $A, B$  שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א.  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ב.  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

ג.  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ד.  $P(A) \cap A \neq \emptyset$

ה.  $P(A) \cap A = \emptyset$

ו. תנו דוגמה לקבוצה  $A$  שמקיימת  $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$ .

ז. אם  $\{A\} \subseteq P(B)$ , אז  $P(A) \subseteq P(B)$ .

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:

ח. אם  $P(A) \subseteq P(A - B)$ , אז  $A \cap B = \emptyset$ .

ט. אם  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ , אז  $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$  (שאלה קשה).

(5) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות כלשהן, ונתון  $P(B) - P(A) = P(B) - \{\emptyset\}$ .

הוכיחו כי  $B - A = B$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $P(B) = \{\emptyset, \{\{3\}\}, \{\{4, \emptyset\}\}, \{\{3\}, \{4, \emptyset\}\}\}$ ,  $P(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{\emptyset\}\}, \{3, \{\emptyset\}\}\}$   
 ב.  $P(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{3\}\}, \{\{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}\}, \{3, \{\emptyset, 3\}\}, \{\{3\}, \{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}\}$   
 ג.  $C - P(C) = \{3, \{\emptyset, 3\}\}$ ,  $P(C) \cap C = \{\{3\}\}$ ,  $P(A) \cap A = \emptyset$ ,  $P(A) \cap B = \{\{3\}\}$
- (2) א.  $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$ ,  $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$   
 ב.  $P(B) - P(A) = \{\{1\}, \{1, \emptyset\}\}$ ,  $P(A) - P(B) = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$   
 ג.  $P(A) - A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ,  $P(A) - A = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- (3)  $P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ,  $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- (4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.  
 ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.
- (5) הוכחה.

## מכפלה קרטזית

## שאלות

(1) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות. הוכיחו:

א.  $(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B)$

ב.  $((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  מתקיים

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

ד. אם  $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$ , אז

$$(((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C))$$

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  מתקיים

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

(2) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה  $A, B$  שתי קבוצות כלשהן ותהי  $S \subseteq A \times B$ .

אז קיימות  $C \subseteq A$  ו- $D \subseteq B$ , כך ש- $S = C \times D$ .

(3) הוכיחו או הפריכו:

קיימות שתי קבוצות  $A, B$ , כך ש- $|A \times B| = 24$  וגם  $|A \cap B| = 5$  (סימן  $||$  על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

(4) הוכיחו או הפריכו:

לכל שלוש קבוצות  $A, B, C$  מתקיים  $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$ .

(5) הדגימו שלוש קבוצות  $A, B, C$ , כך ש- $(A \times (B \times C)) \cap ((A \times B) \times C) \neq \emptyset$ .

**תשובות סופיות**

- (1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
- (2) לא נכונה.
- (3) לא נכונה.
- (4) נכונה.
- (5) ראו סרטון.